复数域上一元六次方程的一种解法

韩山师范学院数学与信息技术系　吴捷云

［摘　要］本文用二次型理论研究复数域上的一元六次方程，给出一类一元六次方程的求根公式。

［关键词］复数域　一元六次方程　求根　二次型

众所周知，一元 n 次方程的求根问题是代数学的一个重要问题，近代很多著名数学家对这个问题非常关注。我们知道，次数小于五的一元 n 次方程都有求根公式，而当方程的次数大于或等于五时，一般的就没有求根公式了。文献 [1] 给出了实系数一元四次方程的矩阵解法，本文将用二次型理论给出复数域上一元六次方程和五次方程的求根新方法，从而可求出满足条件的方程的根式解。

考察一元多项式

$f(x)=a_0x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+a_6$ 。

引理 1　记矩阵

$$A(u)=\begin{pmatrix} a_0 & a_1/2 & a_2/3 & u \\ a_1/2 & a_2/3 & (a_3-2u)/2 & a_4/3 \\ a_2/3 & (a_3-2u)/2 & a_4/3 & a_5/2 \\ u & a_4/3 & a_5/2 & a_6 \end{pmatrix}, u\in C。$$

则关于 u 的多项式 detA(u)在复数域上至少存在一个根 u_0。

证　因为

$$\det A(u)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1/2 & a_2/3 & u \\ a_1/2 & a_2/3 & (a_3-2u)/2 & a_4/3 \\ a_2/3 & (a_3-2u)/2 & a_4/3 & a_5/2 \\ u & a_4/3 & a_5/2 & a_6 \end{vmatrix}$$

展开可知 det A(u)是一个关于的 u 四次多项式(u^4 的系数为 1)，由代数基本定理可知多项式 detA(u)在复数域上至少有一个根。(对四次多项式 detA(u)来说，可以用 Ferrari 的方法求出根式解)

引理 2　记 $Y=(x^3,x^2,x,1)^T$, u_0 是 det A(u)在复数域上的一个根，则

$Y^TA(u_0)Y=a_0x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+a_6=f(x)$。

证　直接计算即可。

现在令 $Y=(x^3,x^2,x,1)^T=(y_1,y_2,y_3,y_4)^T$，则 $Y^TA(u_0)Y$ 可表示为一个四元二次型：

$g_{u_0}(y_1,y_2,y_3,y_4)=Y^TA(u_0)Y$。

定理 1　给定一元多项式

$f(x)=a_0x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+a_6$

则存在一个可逆线性变换 Y = PZ，使得

$f(x)=h(z_1,z_2,z_3,z_4)=\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\lambda_3z_3^2$

这里 P 为 n 阶可逆矩阵，$Z=(z_1,z_2,z_3,z_4)^T$，z_1,z_2,z_3,z_4 是 $x^3, x^2, x, 1$ 的线性组合。

证　设 u_0 是 det A(u)在复数域上的一个根，因为 $A(u_0)$是复数域上的一个四阶对称矩阵，所以存在一个可逆线性变换 Y = PZ，把二次型 $g_{u_0}(y_1,y_2,y_3,y_4)=Y^TA(u_0)Y$ 化为标准形 $\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\lambda_3z_3^2+\lambda_4z_4^2$。注意到 $\det A(u_0)=0$ 可知 $A(u_0)$ 的秩 < 4。因此可选择适当的可逆矩阵 P，使得 $\lambda_4=0$。故存在一个可逆线性变换 Y = PZ，使得

$f(x)=h(z_1,z_2,z_3,z_4)=\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\lambda_3z_3^2$

而 z_1,z_2,z_3,z_4 显然是 $x^3, x^2, x, 1$ 的线性组合。

从定理 1 的证明过程还可知道，当 $A(u_0)$的秩 =1 时，可选择适当的可逆线性变换 Y = PZ，使 $\lambda_1\neq0,\lambda_2=\lambda_3=0$。当 $A(u_0)$的秩 = 2 时，可选择适当的可逆线性变换 Y = PZ，使 $\lambda_1\lambda_2\neq0,\lambda_3=0$。由此可得

定理 2　对于一元六次方程

$f(x)=a_0x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+a_6\quad(a_0\neq0)$

⑴ 当矩阵 $A(u_0)$的秩 = 1 时，存在一个可逆线性变换 Y = PZ，使得

$f(x)=h(z_1,z_2,z_3,z_4)=\lambda_1z_1^2=0$ 。

因此方程 f(x) = 0 与 $z_1^2=0$ 同解。

⑵ 当矩阵 $A(u_0)$的秩 = 2 时，存在一个可逆线性变换 Y = PZ，使得

$f(x)=h(z_1,z_2,z_3,z_4)=\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2=0$。

因此方程 f(x)=0 与 $\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2=0$ 同解，从而与方程 $(\sqrt{\lambda_1}z_1+i\sqrt{\lambda_2}z_2)(\sqrt{\lambda_1}z_1-i\sqrt{\lambda_2}z_2)=0$ 同解。

不管是情形 ⑴ 还是情形 ⑵，我们都已经把一元六次方程的求根问题转化为一元三次方程的求根问题，而一元三次方程可以用 Cardan 的方法求出方程的根式解。

例 1　求解一元六次方程 $x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1=0$ 。

解　令

$$A(u)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & u \\ 1 & 1 & 2-u & 1 \\ 1 & 2-u & 1 & 1 \\ u & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

取方程 detA(u)=0 的一个解 $u_0=1$。可以看出 $A(1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 1。取可逆线性变换

$$\begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

可把二次型 $Y^TA(1)Y$ 化为标准形。由定理 2，原方程与 $(x^3+x^2+x+1)^2=0$ 同解。因此原方程的根为 $x_1=-1, x_2=i, x_3=-i$，它们都是二重根。

例 2　求解一元六次方程 $x^6+6x^5+27x^4+66x^3+54x^2+24x+8=0$ 。

解　令

$$A(u)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & u \\ 3 & 9 & 33-u & 18 \\ 9 & 33-u & 18 & 12 \\ u & 18 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

取方程 det A(u)=0 的一个解 $u_0=6$，可以看出 $A(6)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 6 \\ 3 & 9 & 27 & 18 \\ 9 & 27 & 18 & 12 \\ 6 & 18 & 12 & 8 \end{pmatrix}$ 的秩为 2。取可逆线性变换

$$\begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

可把二次型 $Y^TA(6)Y$ 化为标准 $z_1^2-63z_2^2$。由定理 2，原方程与

$(x^3+3x^2+9x+6)^2-63(x+2/3)^2=0$ 同解。亦即与

$[x^3+3x^2+3(3+\sqrt{7})x+2(3+\sqrt{7})][x^3+3x^2+3(3-\sqrt{7})x+2(3-\sqrt{7})]=0$

同解。利用 Cardan 公式求得一元三次方程

$x^3+3x^2+3(3+\sqrt{7})x+2(3+\sqrt{7})=0$ 和 $x^3+3x^2+3(3-\sqrt{7})x+2(3-\sqrt{7})=0$

的解分别为 $x_1=\alpha_1+\beta_1-1$，$x_2=\alpha_1\omega+\beta_1\omega^2-1$，$x_3=\alpha_1\omega^2+\beta_1\omega-1$

和 $x_4=\alpha_2+\beta_2-1$，$x_5=\alpha_2\omega+\beta_2\omega^2-1$，$x_6=\alpha_2\omega^2+\beta_2\omega-1$

其中 $\omega=-1/2+\sqrt{3}i/2$，而

$\alpha_1=\sqrt[3]{(1+\sqrt{7})/2+\sqrt{(104+39\sqrt{7})/2}}$ ，

$\beta_1=\sqrt[3]{(1+\sqrt{7})/2-\sqrt{(104+39\sqrt{7})/2}}$ ，

$\alpha_2=\sqrt[3]{(1-\sqrt{7})/2+\sqrt{(104-39\sqrt{7})/2}}$ ，

$\beta_2=\sqrt[3]{(1-\sqrt{7})/2-\sqrt{(104-39\sqrt{7})/2}}$ ，

所以 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6 就是原方程的根。

附注：如果把定理 2 中满足的条件改为 $a_0=0,a_1\neq0$，即得到一元五次方程的相应结果。

参考文献

[1] 盛兴平.实系数一元四次方程的矩阵解法.数学通报，2002(12)

[2] 辜青萍，冯可佩.一元三次多项式根的一个判别条件.江汉大学学报，2001(6)

[3] 张禾瑞，郝鈵新. 高等代数. 北京：高等教育出版社，1998